

Il Fattore di Sylvester

Donato Saeli · Maurizio Spano

ABSTRACT Sylvester factor, an essential part of the asymptotic formula of Hardy and Littlewood which is the *extended* Goldbach conjecture, regarded as strongly multiplicative arithmetic function, has several remarkable properties.

Il fattore di Sylvester, parte essenziale della formula asintotica di Hardy e Littlewood che costituisce la congettura *estesa* di Goldbach, riguardato come funzione aritmetica fortemente moltiplicativa, presenta diverse proprietà significative.

KEYWORDS Goldbach's extended conjecture, Sylvester factor. · Strongly multiplicative function. · Convolution inverse.

MSC 11P32

Donato Saeli
Via Giovanni XXIII, 29 - 85100 Potenza (PZ), Italy
Tel.: +39-0971-51280
Email: donato.saeli@gmail.com

Maurizio Spano
Via Rocco Scotellaro, 19 - 75019 Tricarico (MT), Italy
Tel.: +39-348 998 5205

1 Introduzione

Consideriamo la funzione aritmetica $g(n)$, che associa ad n il numero delle coppie ordinate (p, q) di numeri primi dispari tali che $p + q = 2n$; il grafico di $g(n)$ in $[3, N]$, con N sufficientemente grande, appare come una cometa.[†]

La congettura *estesa* di Goldbach, formulata nel 1922 da Hardy e Littlewood afferma che

$$g(n) \sim h(n) := \frac{4cn}{(\lg n)^2} \prod_{\substack{p|n \\ p \neq 2}} \frac{p-1}{p-2}, \quad (1)$$

dove Il prodotto $\prod_{\substack{p|n \\ p \neq 2}} \frac{p-1}{p-2}$ s'intende esteso a tutti i numeri primi dispari che

dividono n e si pone uguale a 1 se è privo di fattori, cioè se $n = 2^k$ ($k \geq 0$).

La costante c è il valore del prodotto (infinito), esteso a tutti i primi dispari:

$$\prod_{p \neq 2} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\prod_{2 < p < n} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) \right] = 0,6601618 \dots$$

Sylvester [S] nel 1871, aveva proposto una formula equivalente alla $g(n) \sim 2e^{-\gamma} h(n)$;‡ ma la (1)

“... è la sola formula di questa sorta che può essere corretta, cosicché la formula di Sylvester è errata. Ma Sylvester è stato il primo ad identificare il fattore

$$\prod_{\substack{p|n \\ p \neq 2}} \frac{p-1}{p-2}$$

a cui sono dovute le *irregolarità* della $h(n)$. Non vi sono indicazioni sufficienti per mostrare come sia stato condotto al suo risultato. ...” [HL] (pp. 32, 33).

La (1) può essere riguardata in vari modi [Smd] (pp. 2-4), molto suggestivo è il seguente:

$$S(n) := \prod_{\substack{p|n \\ p \neq 2}} \frac{p-1}{p-2} \sim G(n) := \frac{(\lg n)^2}{4cn} g(n). \quad (2)$$

Se si effettua il confronto fra i due membri della (2), il risultato inizialmente irrilevante (fig. 1), diventa piuttosto interessante al crescere di n (fig. 2).

[†] La *cometa di Goldbach*: l'affermazione $g(n) > 0$ per ogni $n > 2$ equivale alla congettura di Goldbach: *Ogni numero pari non inferiore a quattro è somma di due primi.*

[‡] $2e^{-\gamma} = 1,1229 \dots$

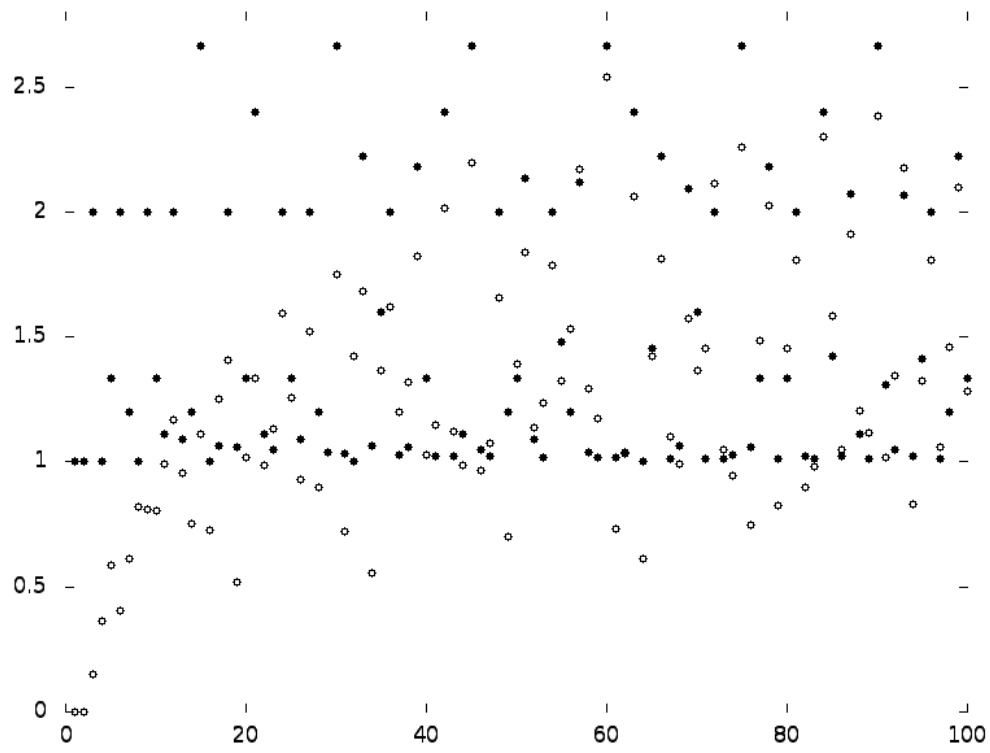


Fig. 1 $\bullet S(n)$, $\circ G(n)$

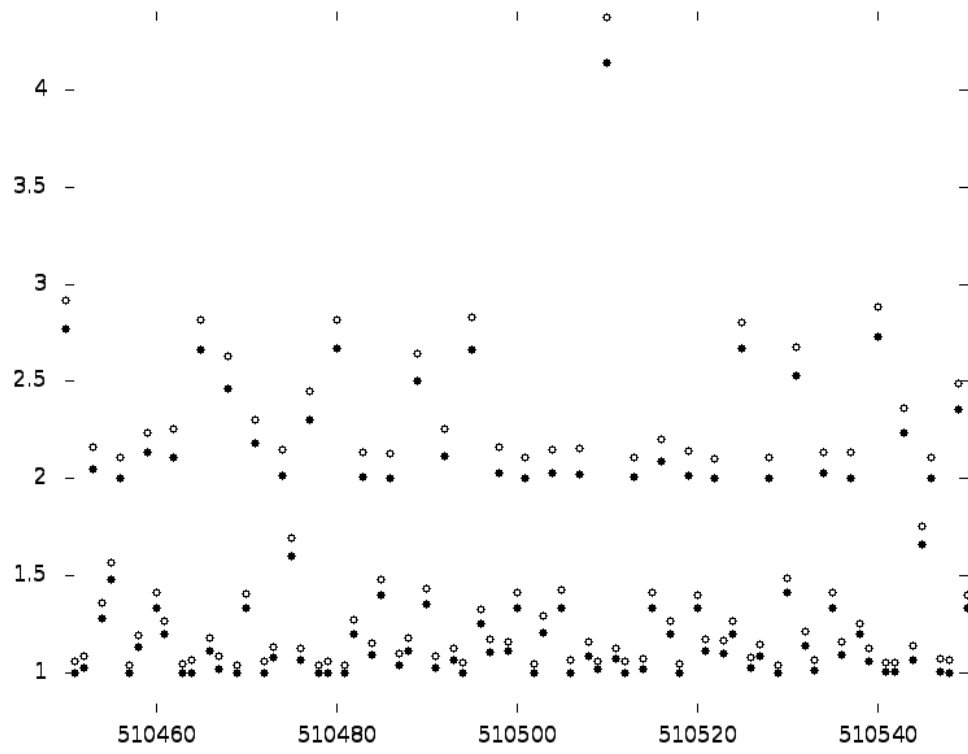


Fig. 2 $\bullet S(n)$, $\circ G(n)$

Gli autori hanno verificato che è $\mathcal{S}(n) < G(n)$, per $72.065 \leq n \leq 2.000.000$. Sarebbe interessante stabilire se e per quale valore di n ($> 2 \cdot 10^6$) risulti $\mathcal{S}(n) > G(n)$.

Vogliamo richiamare infine l'attenzione su un'altra relazione nella quale il *fattore di Sylvester* riveste un ruolo essenziale. Se $m \in \mathbb{N}$, indichiamo con \mathbb{Z}_m l'anello delle classi di resto modulo m e con \mathbb{Z}_m^* il gruppo delle classi prime con m . È noto che

$$s_m^*(n) = \# \{(\bar{r}, \bar{s}) \in \mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_m^* \mid \bar{r} + \bar{s} = \bar{n}\} = m \prod_{\substack{p \mid m \\ p \nmid n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{\substack{p \mid m \\ p \nmid n}} \left(1 - \frac{2}{p}\right)$$

[Dm], [Sj]; se scegliamo $m = 2 \cdot q_1 \cdots q_t$, con $q_1 < q_2 < \cdots < q_t$ numeri

primi dispari e per $n \in \mathbb{N}$ poniamo $\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{se } q_i \mid n \\ 0 & \text{se } q_i \nmid n \end{cases}$ per $i = 1, \dots, t$,

allora $d = (2n, m) = 2 \cdot q_1^{\alpha_1} \cdots q_t^{\alpha_t}$ e quindi anche

$$\begin{aligned} s_m^*(2n) &= m \prod_{p \mid d} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{p \mid \frac{m}{d}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) = \prod_{i=1}^t (q_i - 1)^{\alpha_i} (q_i - 2)^{1-\alpha_i} \\ &= \prod_{i=1}^t \left(\frac{q_i - 1}{q_i - 2}\right)^{\alpha_i} \prod_{i=1}^t (q_i - 2). \quad \text{In altri termini:} \\ s_m^*(2n) &= \mathcal{S}(d) \cdot s_m^*(2). \end{aligned}$$

2 Osservazioni sulle funzioni fortemente moltiplicative

Una funzione aritmetica $f(n)$ si dice *fortemente moltiplicativa* se è moltiplicativa e quali che siano p primo, k intero positivo, è $f(p^k) = f(p)$.

Esempi di funzioni fortemente moltiplicative sono:

la funzione $\bar{\varphi}(n) = \prod_{p \mid n} \frac{p-1}{p} = \frac{\varphi(n)}{n}$ ($\varphi(n)$ indicatore di Eulero)

e giust'appunto il fattore di Sylvester $\mathcal{S}(n) = \prod_{\substack{p \mid n \\ p \neq 2}} \frac{p-1}{p-2}$ (fig. 3 e 4).

PROPOSIZIONE 2.1 - Se f e g sono funzioni aritmetiche fortemente moltiplicative, p un primo e k un intero positivo, allora

$$(f * g)(p^k) = \sum_{i=0}^k f(p^i) g(p^{k-i}) = f(p) + g(p) + (k-1) f(p) g(p)$$

e per $k \geq 2$, $f^{-1}(p^k) = (-1)^k f(p) [f(p) - 1]^{k-1}$. •

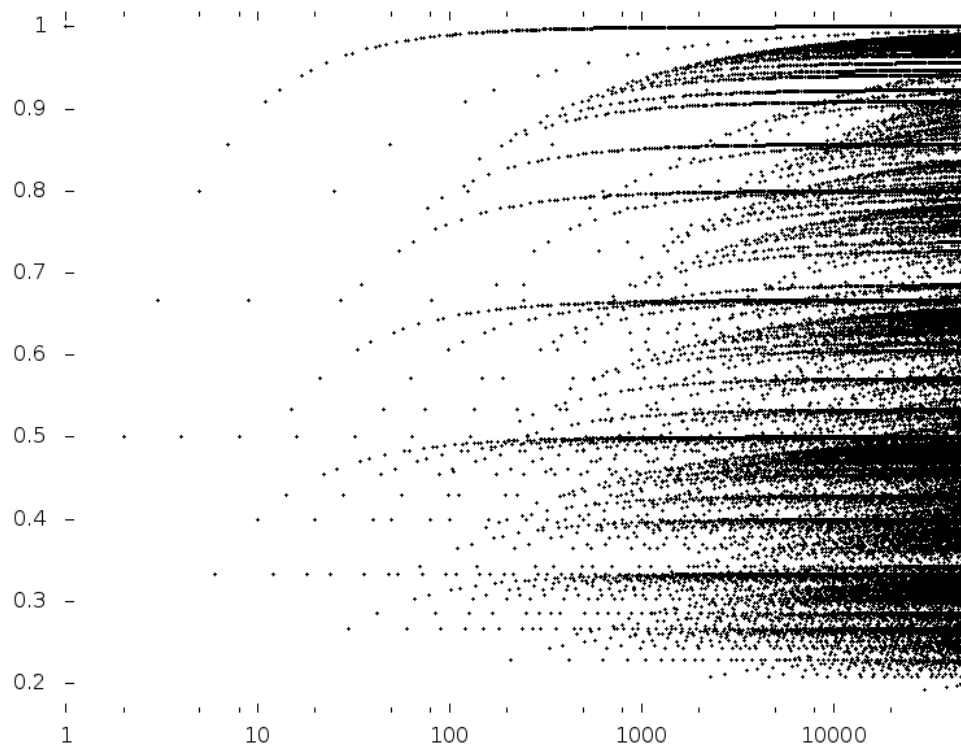


Fig. 3 $\bar{\varphi}(n) = \frac{\varphi(n)}{n}$

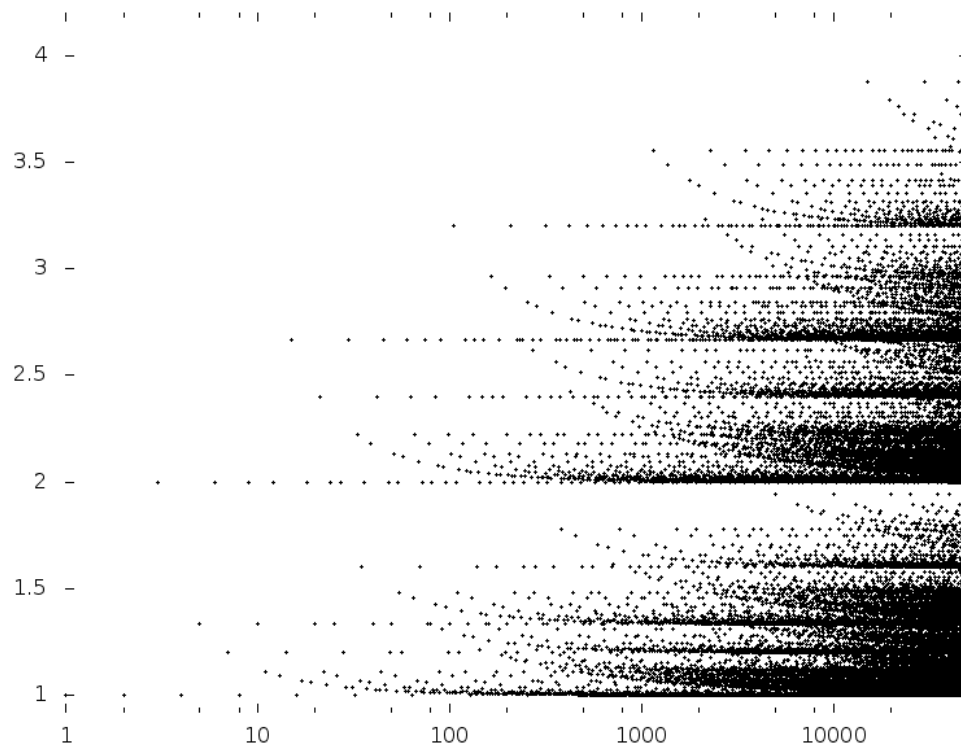


Fig. 4 $S(n)$

DIMOSTRAZIONE. (Per induzione su k).

$$f^{-1}(p^2) = -f(p)f^{-1}(p) - f(p^2)f^{-1}(1) = f(p)[f(p) - 1].$$

$$f^{-1}(p^{k+1}) = -\sum_{i=1}^{k+1} f(p^i)f^{-1}(p^{k-i+1})$$

$$= -f(p)\left\{-f(p) + 1 + \sum_{i=1}^{k-1} f^{-1}(p^{k-i+1})\right\}$$

$$= -f(p)\left\{-f(p) + 1 + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i+1} f(p)[f(p) - 1]^{k-i}\right\}$$

$$= f(p)[f(p) - 1]\left\{1 + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i} f(p)[f(p) - 1]^{k-i-1}\right\}$$

$$= f(p)[f(p) - 1] \sum_{i=1}^k f^{-1}(p^{k-i}) = [f(p) - 1] \sum_{i=1}^k f(p^i)f^{-1}(p^{k-i})$$

$$= -[f(p) - 1]f^{-1}(p^k) = -[f(p) - 1](-1)^k f(p)[f(p) - 1]^{k-1}$$

$$= (-1)^{k+1} f(p)[f(p) - 1]^k.$$

△

Così abbiamo:

$$(\bar{\varphi} * \mathcal{S})(p^k) = (k+1)\left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right), \text{ se } p \neq 2; \quad (\bar{\varphi} * \mathcal{S})(2^k) = 1 + \frac{k}{2}.$$

$$\bar{\varphi}^{-1}(p^k) = \frac{1-p}{p^k}.$$

$$\mathcal{S}^{-1}(p^k) = \frac{1-p}{(p-2)^k}, \text{ se } p \neq 2; \quad \mathcal{S}^{-1}(2) = -1, \quad \mathcal{S}^{-1}(2^k) = 0, \text{ se } k \geq 2.$$

PROPOSIZIONE 2.2 - Sia f una funzione aritmetica fortemente moltiplicativa. Per ogni intero $m > 1$, posto $y = f(m)$ e $f^-(y) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = y\}$, si ha: $|f^-(y)| = \aleph_0$. •

Notiamo che $\bar{\varphi}^-(1) = \{1\}$. mentre $|\mathcal{S}^-(1)| = \aleph_0$.

3 Proprietà particolari delle funzioni $\bar{\varphi}$ e \mathcal{S}

Se indichiamo con $\{p_n\}$ la successione dei numeri primi in ordine crescente, è chiaro che la successione $\{\bar{\varphi}(p_n)\}$ è monotona crescente, la $\{\mathcal{S}(p_n)\}$ è, per $n > 1$, monotona decrescente e $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varphi}(p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}(p_n) = 1$.

PROPOSIZIONE 3.1 - $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ e $\mathcal{R}(\bar{\varphi})$ sono entrambi insiemi perfetti e totalmente sconnessi. •

DIMOSTRAZIONE. Infatti $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}(n) \in \mathbb{Q}$; e se $p > n$ è un primo dispari, allora $\mathcal{S}(np) \neq \mathcal{S}(n)$ e $|\mathcal{S}(np) - \mathcal{S}(n)| = |\mathcal{S}(n)||\mathcal{S}(p) - 1| < \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ arbitrario, posto sia anche $p > M_\varepsilon$. Considerazioni simili valgono per la $\bar{\varphi}$. △

Definiamo la successione $\{P_n\}$ come segue:

$$P_1 = p_1, \quad P_2 = p_1 \cdot p_2, \quad \dots, \quad P_n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n, \quad \dots$$

Abbiamo: $\overline{\varphi}(P_n) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\varphi}(P_n) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = 0; \quad \text{dato che } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = +\infty.$$

Per lo stesso motivo $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}(P_n) = \prod_{i=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p_i - 2}\right) = +\infty.$

PROPOSIZIONE 3.2 - Se $m < P_n$, allora $\overline{\varphi}(m) > \overline{\varphi}(P_n).$

Se $m < P_n$ e $2m \neq P_n$, allora $\mathcal{S}(m) < \mathcal{S}(P_n).$ •

DIMOSTRAZIONE. Infatti se $m < P_n$ e $q_1^{\alpha_1} \cdots q_{\nu}^{\alpha_{\nu}} = m$ ne è la decomposizione canonica in fattori primi, allora deve essere $\nu < n$ e $q_i \geq p_i$, per $i = 1, \dots, \nu$.

$$\text{Ne segue } \overline{\varphi}(m) = \prod_{i=1}^{\nu} \left(1 - \frac{1}{q_i}\right) \geq \prod_{i=1}^{\nu} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) > \prod_{i=1}^{\nu+1} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \geq \overline{\varphi}(P_n).$$

Se m è pari, abbiamo

$$\mathcal{S}(m) = \prod_{i=2}^{\nu} \left(1 + \frac{1}{q_i - 2}\right) \leq \prod_{i=2}^{\nu} \left(1 + \frac{1}{p_i - 2}\right) < \prod_{i=2}^{\nu+1} \left(1 + \frac{1}{p_i - 2}\right) \leq \mathcal{S}(P_n).$$

Se m è dispari e $\nu < n - 1$, abbiamo $q_i \geq p_{i+1}$, per $i = 1, \dots, \nu$ e

$$\mathcal{S}(m) = \prod_{i=1}^{\nu} \left(1 + \frac{1}{q_i - 2}\right) \leq \prod_{i=2}^{\nu+1} \left(1 + \frac{1}{p_i - 2}\right) < \prod_{i=2}^{\nu+2} \left(1 + \frac{1}{p_i - 2}\right) \leq \mathcal{S}(P_n).$$

Se m è dispari e $\nu = n - 1$, allora deve essere necessariamente $q_i = p_{i+1}$, per $i = 1, \dots, n - 1$ e $\mathcal{S}(m) = \mathcal{S}(P_n).$ Δ

Bibliografia

- [Dm] M. DEACONESCU, *Adding units mod n*, Elem. Math., 55(2000), 123-127.
- [HL] G. H. HARDY - J. E. LITTLEWOOD, *Some problems of 'partitio numerorum' III: on the expression of a number as a sum of primes*, Acta Math., 44(1922), 1-70.
- [S] J. J. SYLVESTER, *On the partition of an even number into two primes*, Proc. London Math. Soc. Ser. I, 4(1871), 4-6.
- [Sj] J. W. SANDER, *On the addition of units and nonunits mod m*, Journal of Number Theory, 129(2009), 2260-2266.
- [Smd] D. SAEI - M. SPANO, *La cometa di Goldbach e ... le altre*, Lecture Notes of Seminario interdisciplinare di Matematica, Vol. 10(2011), 45-57.